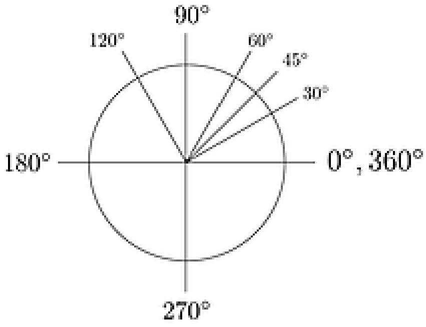
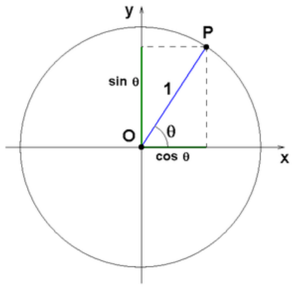
PARAGRAAF 7.1 : EENHEIDSCIRKEL EN RADIAAL

LES 1 : DE EENHEIDSCIRKEL IN GRADEN



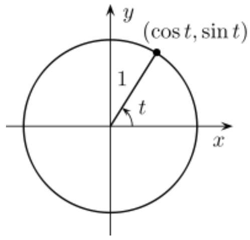
THEORIE EENHEIDSCIRKEL EN GRADEN



- Eenheidscirkel = { Cirkel met middelpunt O en straal 1 }
- $\cos(\theta) = \frac{x\text{−}coordinaat}{1} \rightarrow x = \cos(\theta)$
- $\sin(\theta) = \frac{y\text{−}coordinaat}{1} \rightarrow y = \sin(\theta)$
- Ieder punt P op de cirkel geldt : $(x, y) = (\ \cos(\theta)\ , \sin(\theta)\ )$

VOORBEELD 1 : GRADEN EN COÖRDINATEN

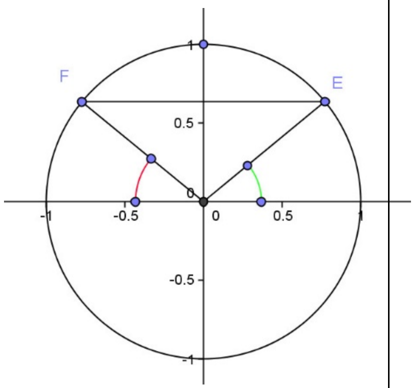
Kijk naar de eenheidscirkel. Bereken de coördinaten als



a. $t = 90$
b. $t = 22$

OPLOSSING 1

a. Dit mag gewoon op de GR : $(x, y) = (\cos(90), \sin(90)) = (0{,}1)$
b. Dit mag gewoon op de GR : $(x, y) = (\cos(22), \sin(22)) = (0{,}93\,;0{,}37)$



VOORBEELD 2

Bereken de hoek van E en F als je weet dat $y_F = 0{,}8$.

OPLOSSING 2

(1) Je weet dat $y = sin(t) = 0{,}8 \rightarrow t = sin^{-1}(0{,}8) = 53°$.
(2) De andere hoek is dan $180 - 53 = 127°$

LES 2 : DE EENHEIDSCIRKEL IN RADIALEN

THEORIE EENHEIDSCIRKEL EN RADIALEN

- Radiaal = { Afstand (in cm) die iemand heeft afgelegd als hij over de rand van de cirkel loopt }
- De omtrek van de cirkel = 2π· r = 2π · 1 = 2π
- $2\pi\, rad \;=\; 360\; graden \rightarrow \pi\, rad \;=\; 180\; graden$. In een tabel :

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
rad	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π

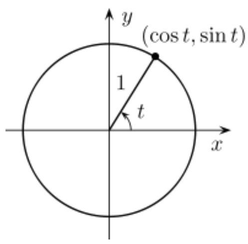
Dus $180\; graden \;=\; \pi\, rad$

$1\; graad \;=\; \frac{1}{180}\pi\, rad$

- Voor ieder punt P op de cirkel geldt : $(x, y) = (\,\cos(\theta)\,, \sin(\theta)\,)$
- Je wisselt op de GR tussen graden en radialen via de knop MODE.

VOORBEELD 2 : RADIALEN

Kijk naar de eenheidscirkel. Bereken de coördinaten als



a. $t = 1\frac{1}{2}\pi$

b. $t = 1\frac{1}{3}\pi$

c. $t = 5\;(rad)$

OPLOSSING 2

a. Dit mag gewoon op de GR : $(x, y) = (\cos\left(1\frac{1}{2}\pi\right), \sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right)) = (0, -1)$

b. Dit mag gewoon op de GR : $(x, y) = (\cos\left(1\frac{1}{3}\pi\right), \sin\left(1\frac{1}{3}\pi\right)) = (-0{,}5 ; -0{,}87)$

c. Dit betekent dat je 5 cm over de cirkel gelopen hebt !!!
Realiseer je dat dat een waarde is tussen $\pi = 3{,}14$ en $2\pi = 6{,}28$
Op de GR : $(x, y) = (\cos(5), \sin(5)) = (0{,}28 ; -0{,}96)$

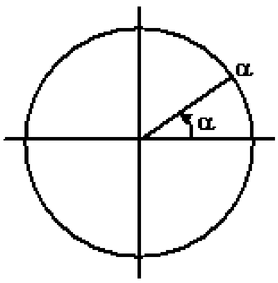
VOORBEELD 3 : HOEK BEREKENEN

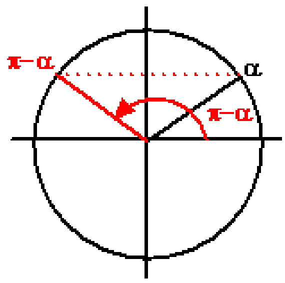
Bereken de hoek α, met α in radialen.($0 \leq \alpha \leq 2\pi$)

a. $y = 0{,}72$
b. $x = 0{,}18$

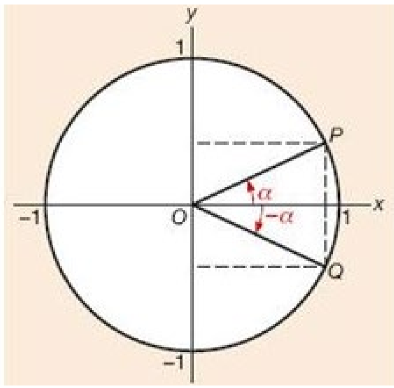
OPLOSSING 3

a. $\sin(\alpha) = 0{,}72 \rightarrow \alpha = \sin^{-1}(0{,}72) = 0{,}80\ (cm)$
Uit het plaatje hiernaast zie je dat er nog een oplossing is, waarbij de $y = 0{,}72$
$\alpha = \pi - 0{,}80 = 3{,}14 - 0{,}80 = 2{,}34$





b. $\cos(\alpha) = 0{,}18 \rightarrow \alpha = \cos^{-1}(0{,}18) = 1{,}39\ (cm)$
Uit het plaatje hiernaast zie je dat er nog een oplossing is, waarbij de $x = 0{,}18$
$\alpha = 2\pi - 1{,}39 = 6{,}28 - 1{,}39 = 4{,}89$



PARAGRAAF 7.2 : GONIO-VERGELIJKINGEN OPLOSSEN

LES 1 : GONIO-VERGELIJKINGEN OPLOSSEN

Om goniometrische vergelijkingen op te lossen moet je gebruik maken van een aantal gegevens

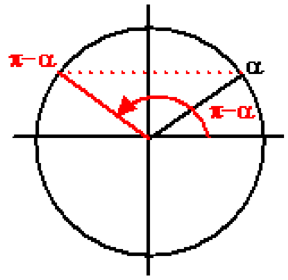
(1) DE STANDAARDTABEL

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
rad	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1

OPMERKING

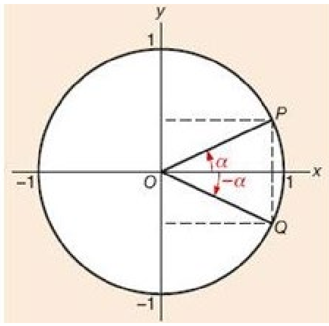
- Uit deze tabel kun je bijv. aflezen dat $sin(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}$ of $cos(0) = 1$.
- Als de waarde negatief is, tel je er π bij op. Dus bijv.
  $sin(1\frac{1}{6}\pi) = -\frac{1}{2}$
  $cos(1\frac{1}{6}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

(2) DE GONIO VERGELIJKINGS REGELS :



(1) $sin(A) \ = \ sin(B)$

$$A = B + k \cdot 2\pi \quad v \quad A = \ \pi - B + k \cdot 2\pi$$



(2) $cos(A) \ = \ cos(B)$

$$A = B + k \cdot 2\pi \quad v \quad A = \ -B + k \cdot 2\pi$$

Opmerking

Kijk naar de plaatjes om te begrijpen waarom de regels zo zijn !!!!

(3) EEN STAPPENPLAN

Stappenplan Gonio-vergelijking oplossen

(1) Zorg dat er links geen getal voor de sin of cos staat
(2) Zet de rechtse waarde om in een sin/cos-waarde m.b.v. de standaardtabel
(3) Gebruik bovenstaande regel om de vergelijking verder op te lossen
(4) Schrijf alle oplossingen op die binnen het domein liggen

VOORBEELD 1

Los exact op

a. $sin(x) = 1$

b. $2cos(x) = 1$ met domein $[\,0\,, 4\pi\,]$

c. $4cos(2x) = -2\sqrt{3}$

d. $sin(x) + sin^2(x) = 0$

OPLOSSING 1

a. **(2)** $sin(x) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)$

(3) $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \;\; v \;\; x = \pi - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ (zelfde)

$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

b. **(1)** $cos(x) = \frac{1}{2}$

(2) $cos(x) = \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)$

(3) $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \;\; v \;\; x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

(4) $x = \frac{1}{3}\pi \;\; v\, x = 2\frac{1}{3}\pi \;\; v \;\; x = 1\frac{2}{3}v \;\; x = 3\frac{2}{3}\pi$

c. **(1)** $cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

(2) $cos(x) = \cos\left(1\frac{1}{6}\pi\right)$

(3) $x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \;\; v \;\; x = -1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

d. $sin(x) + sin^2(x) = 0$

$sin(x)[1 + sin(x)] = 0$

$sin(x) = 0 \;\; v \;\; 1 + sin(x) = 0$

(1) $sin(x) = 0 \;\; v \;\; sin(x) = -1$

(2) $sin(x) = \sin(0) \;\; v \;\; sin(x) = \sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right)$

(3) $x = 0 + k \cdot 2\pi \;\; v \;\; x = \pi - 0 + k \cdot 2\pi \;\; v$

$x = 1\frac{1}{2}\pi - 0 + k \cdot 2\pi \;\; v \;\; x = \pi - 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = 0 + k \cdot 2\pi \;\; v \;\; x = \pi + k \cdot 2\pi \;\; v$

$x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \;\; v \;\; x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

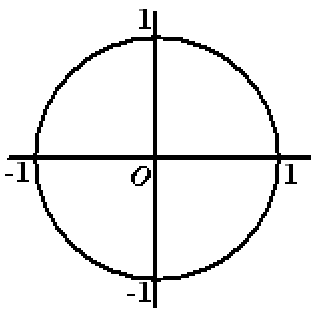
PARAGRAAF 7.3 : GRAFIEK Y=SIN(X) EN Y=COS(X) (TRANSFORMATIES)

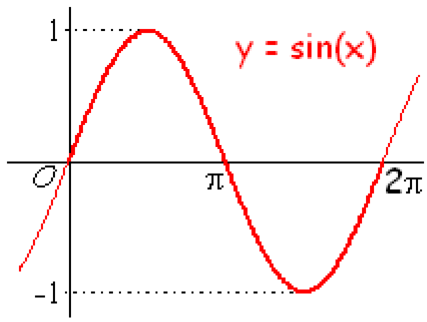
LES 1 TRANSFORMATIES

DE GRAFIEKEN VAN Y=SIN(X) EN Y=COS(X)

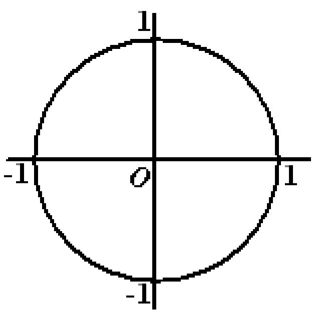
De grafieken van $y = sin(x)\ en\ y = cos(x)$ kun je uit de eenheidscirkel halen :

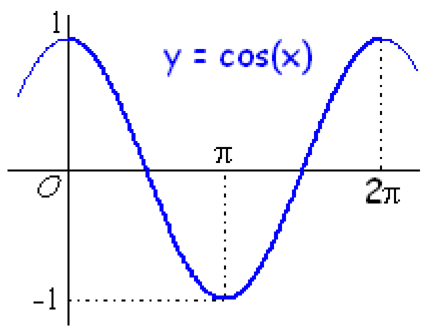
(1) $y = sin\ (x)$ (de y-coördinaat in de eenheidscirkel)





(2) $y = cos\ (x)$ (de x-coördinaat in de eenheidscirkel)





REGELS BIJ TRANSFORMEREN

Je hebt al twee regels geleerd bij transformeren. Je leert nu ook de laatste regel :

(1) $f(x) \xrightarrow{T(a,b)} f(x-a)+b$

(2) $f(x) \xrightarrow{V_{x-as,c}} c \cdot f(x)$

(3) $f(x) \xrightarrow{V_{y-as,c}} f\left(\frac{1}{c} \cdot x\right)$

VOORBEELD 1

Gegeven is de functie $f(x) = sin(x)$. Bepaal de formule die ontstaat als :

a. f eerst 5 naar rechts / 2 omlaag en vervolgens vermenigvuldigd wordt met 3 t.o.v. de x-as.

b. f eerst vermenigvuldigd wordt met -2 t.o.v. de y-as en dan 3 naar links verschoven wordt.

c. Geef de transformaties die nodig zijn om tot de formule

$g(x) = -2 + 3sin\left(3x + \frac{1}{3}\pi\right)$

OPLOSSING 1

a. $sin(x) \xrightarrow{T(5,-2)} sin(x-5) - 2 \xrightarrow{V_{x-as,3}} 3 \cdot (sin(x-5)-2) = 3sin(x-5) - 6$

b. $sin(x) \xrightarrow{V_{y-as,-2}} \sin\left(\frac{1}{-2}x\right) = \sin\left(-\frac{1}{2}x\right) \xrightarrow{T(-3,0)} \sin\left(-\frac{1}{2}(x+3)\right)$

c. $sin(x) \xrightarrow{V_{x-as,3}} 3 \cdot sin(x) \xrightarrow{T\left(-\frac{1}{3}\pi,-2\right)} 3sin\left(x+\frac{1}{3}\pi\right) - 2 \xrightarrow{V_{y-as,\frac{1}{3}}} 3sin\left(3x+\frac{1}{3}\pi\right) - 2$

LES 2 HERLEIDEN VAN SIN(X) EN COS(X)

REGELS VOOR SIN(X) EN COS(X)

Er zijn een aantal belangrijke regels voor herleiden :

(1) $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$

(2) $-sin(x) = sin(x + \pi)$

(3) $-cos(x) = cos(x + \pi)$

(4) $sin(x) = cos(x - ½\pi)$ { ½π naar rechts }

(5) $cos(x) = sin(x + ½\pi)$ { ½π naar links }

(6) $tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$

VOORBEELD 1

Toon aan dat :

a. $tan^2(x) = \frac{sin^2(x)}{1-sin^2(x)}$

b. $cos(3x) + sin\left(3x + 1\frac{1}{2}\pi\right) = 0$

OPLOSSING 1

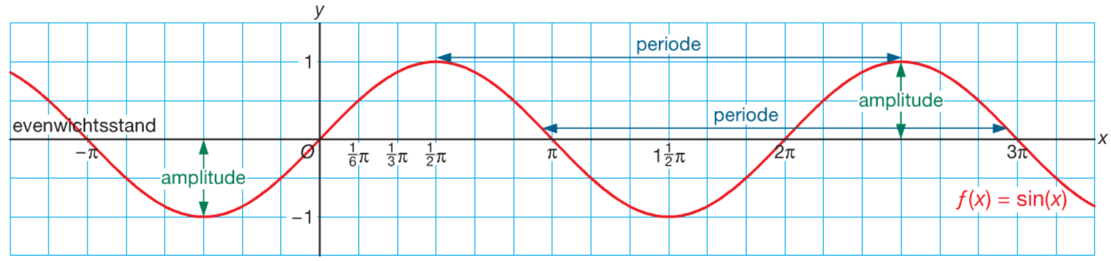
a. $tan^2(x) = tan(x) \cdot tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)} \cdot \frac{sin(x)}{cos(x)} = \frac{sin^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{sin^2(x)}{1-sin^2(x)}$

b. $cos(3x) + sin\left(3x + 1\frac{1}{2}\pi\right) = cos(3x) + cos(3x + \pi) = cos(3x) - cos(3x) = 0$

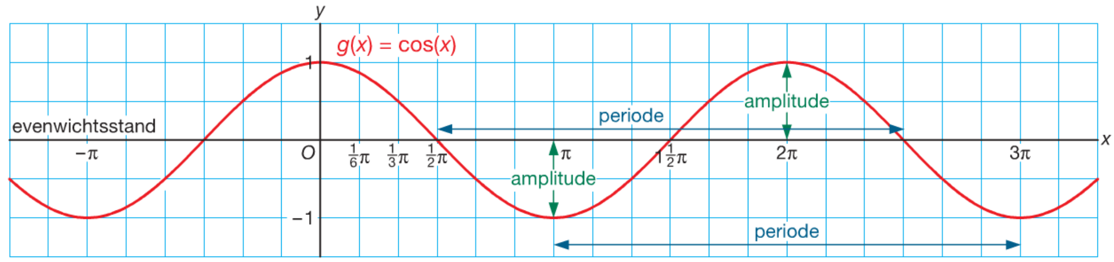
PARAGRAAF 7.4 : TEKENEN EN BEPALEN VAN EEN GONIOFUNCTIE

LES 1 : TEKENEN VAN EEN GONIOFORMULE

Gegeven is gonioformule $y = a + b \sin c\,(x - d)$



$of \quad y = a + b \cos c\,(x - d).$



Hierin is:

(1) a = evenwichtsstand

(2) b = amplitude

(3) $c = \frac{2\pi}{periode} \quad of \quad periode = \frac{2\pi}{c}$

(4) d = verschuiving met

$x + d$ = verschuiving d naar links

$x - d$ = verschuiving d naar rechts

STAPPENPLAN TEKENEN GONIO-FORMULE Y = A + B SIN C (X - D)

(1) Teken eerst de formule $y = a + b \sin cx$ (dus zonder verschuiving d)

(2) Verschuif de eerste grafiek d naar links / rechts

VOORBEELD 1

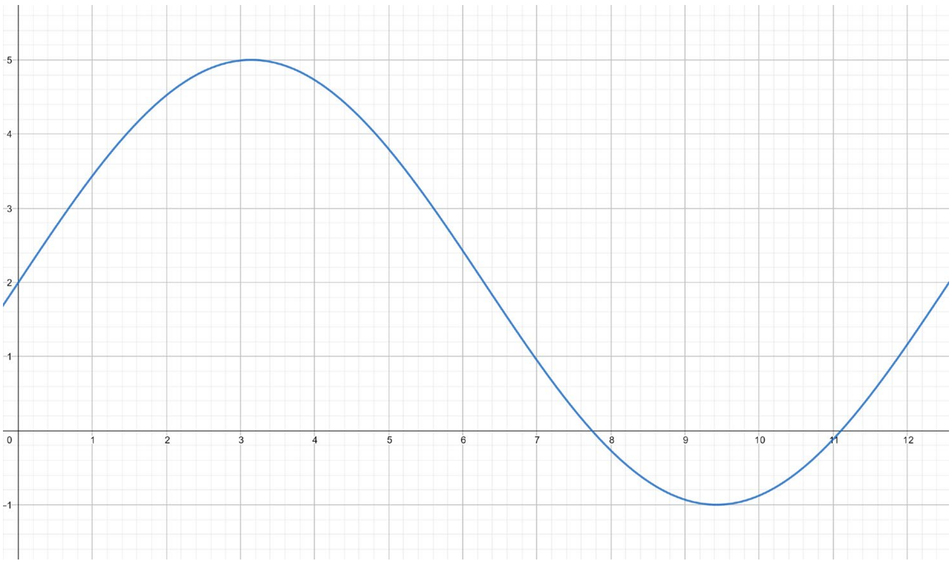
Teken op domein [0 , 2π] de formule $f(x) = 2 + 3sin\frac{1}{2}(x - 1)$

OPLOSSING 1

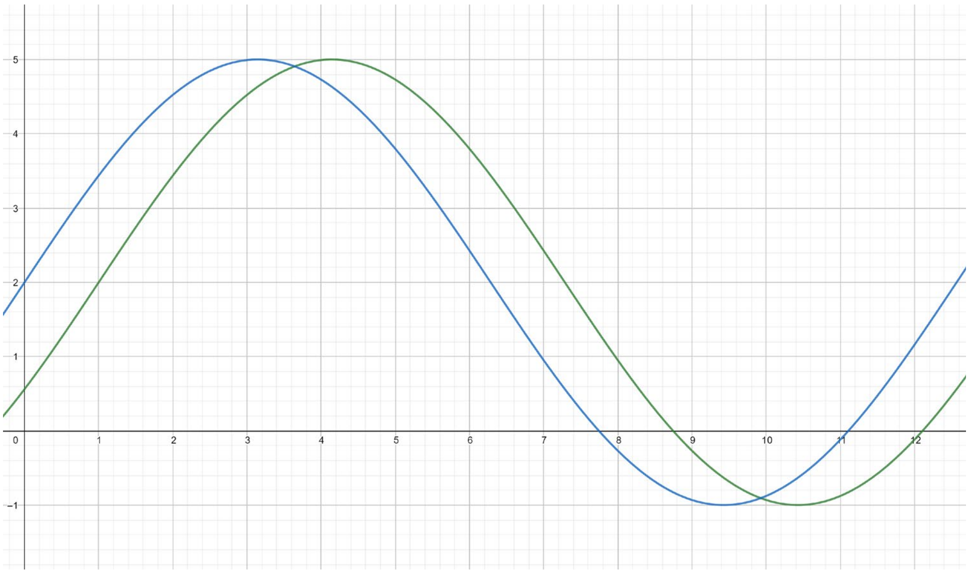
a. **(1)** $a = evenwichtsstand = -2$

$b = amplitude = 3$

$periode = \frac{2\pi}{0,5} = 4\pi\ (\approx 12,57)$

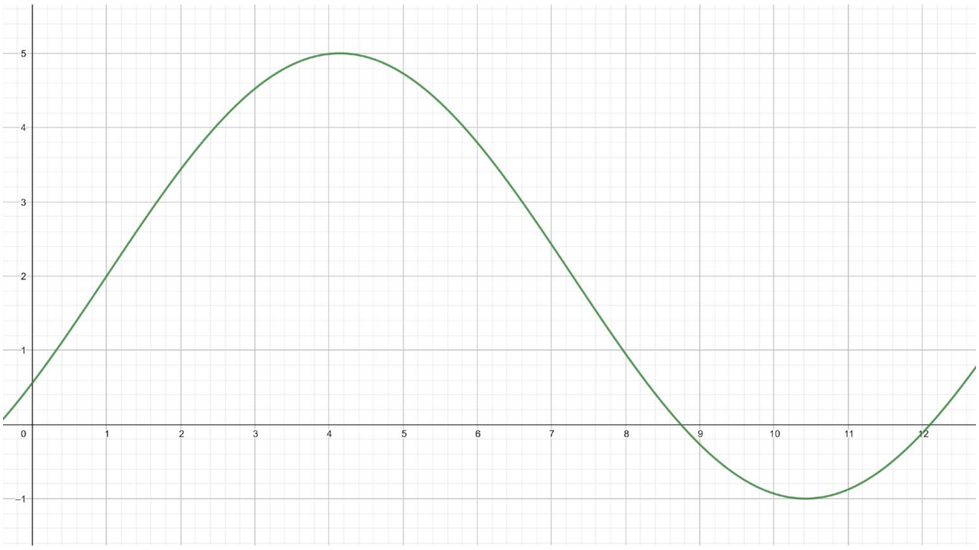


(2) -1 = verschuiving 1 naar links



OPMERKING

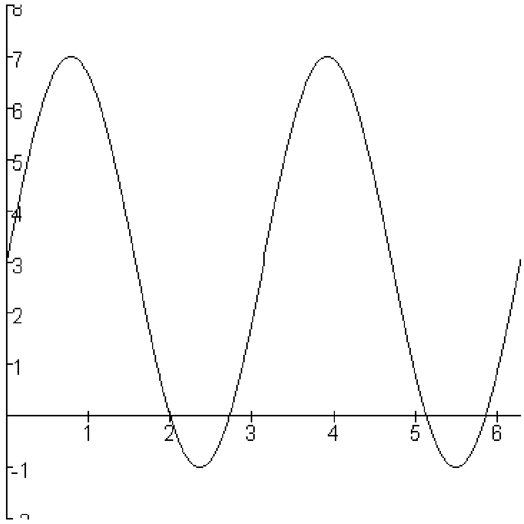
Je kunt ook direct de grafiek tekenen. Je moet dan als start van de grafiek het punt $(verschuiving, evenwichtsstand) = (1{,}2)$ nemen voor de sinusgrafiek.



LES 2 BEPALEN VAN EEN GONIOFORMULE

VOORBEELD 1

Bepaal de formule van de onderstaande grafiek



a. Als het een sinusgrafiek is

b. Als het een cosinusgrafiek is.

OPLOSSING 1

a. De 4 letters berekenen :

(1) a = evenwichtsstand = $\frac{7+-1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

(2) b = amplitude = $7 - 3 = 4$

(3) periode = 4 – 1 = 3 (Van top tot top) dus $c = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

(4) Bij de sinusgrafiek start in de evenwichtsstand en dat doet deze grafiek ook dus $d = 0$

Dus : $y \ = \ 3 + 4\,sin(\frac{2}{3}\pi x)$

b. De stappen 1 t/m 3 zijn gelijk

(4) De cosinusgrafiek start in het maximum en dat is bij $t = 1$, dus is de grafiek 1 naar rechts verschoven

Dus : $y \ = \ 3 + 4\,cos(\frac{2}{3}\pi(x - 1))$

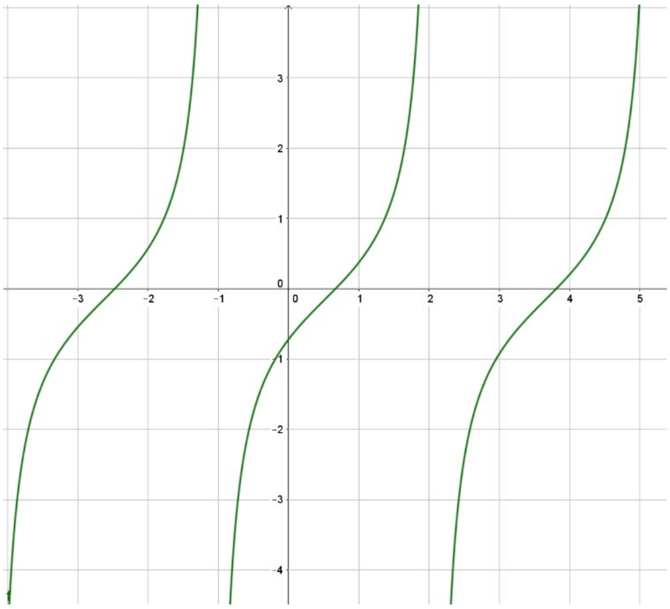
LES 3 F(X)= TAN(X)

THEORIE TAN(X)

(1) $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

(2) tan(x) heeft asymptoot bij $x = ½\pi + k\pi$ (daar is cos(x) = 0)

(3) Grafiek



(4) Vergelijking

$tan(A) = tan(B) \rightarrow \quad A = B + k\pi$

(5) Mooie exacte waarden (Let op $tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$)

	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	b.n.

VOORBEELD 1

Los exact op op het interval [0, 1½π]

$3\tan(4x) = \sqrt{3}$

OPLOSSING 1

$3\tan(4x) = \sqrt{3}$

$\tan(4x) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$\tan(4x) = \tan\left(\frac{1}{6}\pi\right)$

$x = \frac{1}{6}\pi + k\pi$

$x = \frac{1}{6}\pi \;\; v \; x = 1\frac{1}{6}\pi$

PARAGRAAF 7.5 : DIFFERENTIËREN VAN GONIOMETRISCHE FUNCTIES

DIFFERENTIËERREGELS GONIOFORMULES

Er zijn maar 2 regels :

(1) $g(x) = sin(x) \quad \rightarrow g'(x) = cos(x)$

(2) $g(x) = cos(x) \quad \rightarrow g'(x) = -sin(x)$

Denk bij het differentiëren aan de productregel en kettingregel !!!

VOORBEELD 1

Differentieer

a. $f(x) = 2cos(x) + 1$

b. $f(x) = cos(3x)$

c. $f(x) = x\,sin(x)$

d. $f(x) = 3x^2\,cos(x)$

e. $f(x) = sin^3(x)$

OPLOSSING 1

Met productregel en kettingregel.

a. $f'(x) = 2\,sin(x)$

b. $f'(x) = -3\,sin(3x)$

c. $f'(x) = 1 \cdot sin(x) + x\,cos(x) = sin(x) + x\,cos(x)$

d. $f'(x) = 3x^2 \cdot - sin(x) + 6x \cdot cos(x) = - 3x^2 sin(x) + 6xcos(x)$

e. $f(x) = sin^3(x) = (sin(x))^3$

$f'(x) = 3 \cdot \left(sin(x)\right)^2 \cdot cos(x) = 3sin^2(x)cos(x)$